SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

V. SCORNAZZANI

UNA DISUGUAGLIANZA DI HARNACK PER I MINIMI DI ALCUNI FUNZIONALI DEGENERI

18 FEBBRAIO 1988

In questo seminario si prova una disuguaglianza di Harnack per i minimi non negativi di funzionali del tipo

$$(1) \qquad \mathcal{F}(u,\Omega) = \int_\Omega F(x,Du)dx \qquad D = (\frac{\delta}{\delta x_1},\dots,\frac{\delta}{\delta x_n})$$

con $\Omega\subset R^n$ aperto e F funzione di Carotheodory che soddisfa la condizione

$$(2) \qquad M^{-1}w(x)(\sum_{j=1}^{n}\lambda_1^2 P_j^2)^{m/2} \leq F(x,P) \leq Mw(x)(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 P_j^2)^{m/2}$$

dove M>0, m>1 e w è una opportuna funzione peso non-negativa, nel senso di Muckenhoupt,e λ_j,j=1,...,n sono funzioni non-negative soddisfacenti alle stesse ipotesi di [FL1] [FL2].

Indichiamo con $W^1\ (\Omega)$ la chiusura di Lip(Ω) rispetto alla norma

$$\|u,Wu^1(\Omega)\| = (\int_\Omega |u|^m wdx)^{1/m} + (\int_\Omega |\nabla_\lambda u|^m wdx)^{1/m}$$

dove

$$\nabla_\lambda = (\lambda_1\frac{\delta}{\delta x_1},\dots,\lambda_n\frac{\delta}{\delta x_n}).$$

Diamo la seguente definizione:

<u>Definizione 1.</u> Diciamo che $u\in W_m^1(\Omega)$ è un minimo per $\mathcal{F}(\cdot,\Omega)$ e per ogni $\phi\in W_m^1(\Omega)$, sup$\phi\subset\Omega$,

$$(3) \qquad F(u,\mathrm{supp}\phi)\leq F(u+\phi,\ \mathrm{supp}\phi)$$

Nel caso $\lambda_j\equiv 1$ e $w\equiv 1$ Di Benedetto e Trudinger ([BT]) hanno dimostrato la disuguaglianza di Harnack per i minimi non negativi. Successivamente

Modica ([M]) ha esteso questi risultati al caso $\lambda_j \equiv 1$ e w funzione peso verificante la condizione di Muckenhaup: $w \geq 0$ ed esistono $p>1$, $c_w = c(w,p) \geq 1$ tali che per ogni sfera euclidea S_R di raggio R, $S_R \subset \Omega$, risulta

$$(4) \qquad \left(\frac{1}{|S_R|}\int_{S_R} w\,dx\right)\left(\frac{1}{|S_R|}\int_{S_R} w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \leq C_w$$

dove $|S_R|$ è la misura di Lebesgue di S_R.

I risultati di questi lavori non si applicano a funzionali che degenerano non uniformemente come, ad esempio

$$F(x,y,D_x u,D_y u) = (|D_x u|^2 + |x|^{2\sigma}\,|D_y u|^2)^{m/2}\ ,\quad (x,y) \in R^p x R^q,\ \sigma>0$$

che è invece possibile trattare dotando R^n di una metrica che tenga conto della particolare non uniforme degenerazione della funzione F (e quindi della λ_j). Metriche siffatte sono state introdotte e studiate da molti autori, si vedano, ad esempio [FL1],[FL2],[FL3],[NSW].

Sostituendo alla metrica euclidea la metrica suddetta d, è possibile adottare le tecniche di Di Benedetto e Tundinger e di Modica allo studio di funzionali del tipo (1), (2).

Risulta naturale richiedere al peso w di verificare la condizione di Muckenhaupt rispetto alla metrica d, sostituendo l'ipotesi (4) con la seguente: $w \geq 0$, esistono $p>1$, $c_w = c(w,p) \geq 1$, tali che per ogni $B_R \subset \Omega$ risulta

$$(5) \qquad \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w\,dx\right)\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \leq C_w$$

dove B_R è la d-sfera di raggio R. Ne verrà che i nostri risultati si applicano anche, ad esempio, al caso seguente

$$F(x,y,D_x u,D_y u)=(|D_x u|^2+|x|^{2\sigma}|D_y u|^2)^{m/2}\ \|(x,y)\|^{\alpha},(x,y) \in R^p x R^q\ ,\ \sigma>0,\ \alpha \in R$$

Le ipotesi cui devono soddisfare le funzioni λ_j sono:

i) $\lambda_j \geq 0$, $\lambda_1 \equiv 1$, $\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1,\ldots,x_{j-1})$ $\forall x \in R^n$, $j = 1,\ldots,n$

ii) posto $\pi = \{x \in R^n / \prod_{k=1}^{n} x_k = 0\}$, allora

$$\lambda_j \in C(R^n) \cap C^1(R^n - \pi),\ 0 < \lambda_j(x) \leq \Lambda\ ,\ \forall x \in R^n - \Pi,\ \ j=1,\ldots,n$$

$$\lambda_j(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_{j-1}) = \lambda_j(x_1,\ldots,-x_i,\ldots,x_{k-1})\ \ j = 2,\ldots,n,\ i=1,\ldots,j-1$$

iii) esistono $\rho_{ij} \geq 0$ tali che

$$0 \leq x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_j(x)) \leq \rho_{ji}\lambda_j(x)\ \ \ j = 2,\ldots,n\ ,\ i = 1,\ldots,j-1$$

Tali ipotesi consentono, appunto di costruire una metrica d "naturale" per il funzionale, associato ai campi $\pm X_j = \pm \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ $j = 1,\ldots,n$ definita così: $\forall x,y \in R$ consideriamo la famiglia Γ di tutte le curve $\gamma:[0,T_\gamma] \to \Omega$ che siano C^1 a tratti e tali che ogni tratto C^1 sia curva integrale di uno dei campi $\pm X_j$, e che congiungano x con y, allora:

$d(x,y) = \inf\{T_\gamma / \gamma \in \Gamma\}$ (si dimostra che $\forall x,y \in \Omega\ \exists \gamma \in \Gamma$ che congiunge x con y).

Nel precedente seminario ([S]) avevo provato che se $u \in W'_m(\Omega)$ è un minimo per il funzionale (1) (2), allora u e -u appartengono a una classe di De Giorgi $DG_m(\Omega)$ la cui definizione è:

<u>Definizione 2.</u> $u \in W^1_m(\Omega)$ appartiene alla classe di De Giorgi $DG_m(\Omega)$ se per ogni d-sfera $B_R \subset \Omega$ e per ogni $\rho > 0$, $p < R$, $k \in R$ si ha

$$\int_{B(K,\rho)} |\nabla_\lambda u|^m \, wdx \leq \frac{C}{(R-\rho)^m} \int_{B(K,R)} |u-K|^m \, wdx$$

dove $B(K,R) = \{x \in B_R / u(x) > K\}$ e B_ρ è la sfera di raggio ρ concentrica a B_R.

Qui proviamo che se u e $-u \in DG_m(\Omega)$, $u \geq 0$, allora soddisfa alla disuguaglianza di Harnack, e precisamente

<u>Teorema 3.</u> Sia $u, -u \in DG_m(\Omega)$, $u \geq 0$ allora esiste una costante C dipendente da m, M, w, λ_j e da $\bar{x}$ tale che per ogni d-sfera $B(\bar{x},R) \equiv B_R$, con $B_{8R} \subset \Omega$, si ha:

$$\sup_{B_{R/2}} u \leq c \inf_{B_{R/2}} u$$

Nella dimostrazione del Teorema 3 si lavora sullo spazio $(R^n, d, w(x)dx)$ che risulta omogeneo, valendo per la misura $w(x)dx$ la *proprietà di duplicazione* : esiste una costante $\beta \equiv \beta(p, c(u,p), d)$ tale che

$$w(B_{2R}) \leq \beta w(B_R)$$

essendo $w(B_R) = \int_{B_R} w(x)dx$ (si veda [FS], Lemma 2.10).

Punto fondamentale di tale dimostrazione è l'applicazione di un lemma di Krylov-Safanov ([KS]) che tali autori dimostrano nel caso euclideo; nel nostro caso la dimostrazione ha dovuto subire notevoli varianti; potendosi contare solo sul fatto che $(R^n, d, w(x)dx)$ è omogeneo; tale fatto ha pesato abbondantemente sulla dimostrazione del Lemma.

<u>Lemma 3.</u> (di ricoprimento di tipo Krylov-Safanov). Sia B_R d-sfera, $E \subseteq B_R$, $\delta \in]0,1[$ fissato

$\mathscr{B} = \{B(x,4\rho)\cap B_R \ / x\in B_R, \rho>0, \ W(E\cap B(x,\rho))\geq \delta w(B(x,\rho)\cap B_R)\}$

Consideriamo l'insieme

$$E_\delta = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$$

allora si ha una delle due possibilità:

i) $E_\delta = B_R$

ii) $w(E) \leq c\delta w(E_\delta)$

con C>1 dipendente dalla costante di duplicazione di $w(x)dx$

Dimostrazione. Se $w(E)\geq\delta w(B_R)$ allora $w(E\cap B_R) = w(E) \geq \delta w(B_R)$ e quindi B_R è una delle sfere che definiscono E_δ per cui vale la i).

Sia ora $w(E)<\delta w(B_R)$; se $w(E) = 0$ è ovvia la ii), sia perciò $w(E)>0$, non è restrittivo supporre che ogni punto di E sia punto di Lebesgue ([C]) e cioè tale che

$$\lim_{r\to o^+} \frac{w(E\cap B(x,r))}{w(B(x,r))} = 1 \tag{6}$$

In ciò che segue diremo che $B(x,\rho)$ interseca E in modo consistente se $w(E\cap B(x,\rho)) \geq \delta w(B(x,\rho)\cap B_R)$.

Coifman e Weiss ([CW]) hanno provato che per uno spazio omogeneo e per ogni sfera di raggio R esiste un insieme finito massimale di punti della sfera che distano a due a due più di $\frac{R}{2^n}$.

Effettuiamo una successione di ricoprimenti alla maniera seguente: per ogni $n\geq 1$ sia $\{x_1^{(n)},\ldots,x_{I_n}^{(n)}\}\subset B_R$ un insieme massimale con $d(x_i^{(m)},x_j^{(n)})> \frac{R}{2^n}$

e consideriamo le famiglie

$$R^{(P)} = \{B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^p}) \;/\; i = 1,\dots,I_p\} \text{ di ricognimenti di } B_R.$$

Poniamo poi

$$S_p = \{B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^{p-1}})\,|\, i = 1,\dots,I_p, \text{ B interseca E in modo consistente,}$$

$$x_i \notin \bigcup_{h=1}^{p-1} \bigcup_{B\in R^p} B,\; B(x^{(h)}, \frac{R}{2^{h-1}}) \text{ interseca E in modo consistente}\}$$

Essenzialmente utilizzando la proprietà di duplicazione per la misura $w(x)dx$ e il fatto che i punti di E sono punti di Lebesgue, si prova che $\forall x\in E\ \exists p\in N,\ i\in N$ tale che

$$x\in B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^p}) \text{ e } w(E\cap B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^{p-1}})) \geq \delta w(B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^{p-1}}))$$

Definiamo per ogni $B\in \bigcup_{P\in N} S_p$, $\tilde{B}_B$ come segue: sia $B\in \bigcup_{p\in N} S_p$ allora $\exists p\in N,\ \exists i\in\{1,\dots,I_p\}$ tali che $B \equiv B(x_i^{(P)}, \frac{R}{2^{p-1}})\in S_p$ con $x_i^{(P)}\in B(x_j^{(p-1)}, \frac{R}{2^{p-1}})$ per un certo $j\in\{1,\dots,I_{p-1}\}$; poniamo $\tilde{B}_B = B(x_j^{(p-1)}, \frac{R}{2^{p-2}})$. Risulta $B\subset\tilde{B}$ e risulta che $\tilde{B}_B$ non è consistente con E.

Poniamo poi $\tilde{E}_\delta = \bigcup_{p\in N} \bigcup_{B\in S_p} (\tilde{B}_B\cap B_R)$. Si trova facilmente che $\tilde{E}_\delta\subseteq E_\delta$, $E\subseteq\tilde{E}_\delta$ in quanto ogni punto di E è un punto di Lebesgue; si prova inoltre che per $0<\alpha<\frac{1}{4}$ le omotetiche di B (αB) sono disgiunte. Allora, ricordando che la proprietà di duplicazione vale anche per le $B\cap B_R$ (vedi prop. 2.10 [FL2] e Lemma 4 di [C])

$$w(E) = w(\tilde{E}_\delta \cap E) \le \sum_{\substack{p\in N \\ B\in S_p}} w(\tilde{B}_B \cap E) < \delta \sum_{\substack{p\in N \\ B\in S_p}} w(\tilde{B}_B \cap B_R) \le^{(**)}$$

$$\le \delta D \sum_{\substack{p\in N \\ B\in S_p}} w(B\cap B_R) \overset{**}{\le} C\delta \sum_{\substack{p\in N \\ B\in S_p}} w(\alpha B\cap B_R) = C\delta w\Big(\bigcup_{\substack{p\in N \\ B\in S_p}} (\alpha B\cap B_R)\Big) \le$$

$$\le C\delta w\Big(\bigcup_{\substack{p\in N \\ B\in S_p}} (B\cap B_R)\Big) \le C\delta\, w\Big(\bigcup_{\substack{p\in N \\ B\in S_p}} (\tilde{B}_B \cap B_R)\Big) = C\delta w(\tilde{E}_\delta) \le C\delta w(E_\delta).$$

Passiamo alla dimostrazione della disuguaglianza di Harnack (T. 3). Si seguono le seguenti tappe:

Proposizione 4. Sia $u\in DG_m(\Omega)$, $u\ge 0$, allora per ogni $q > 0$ esiste $C \equiv C(\bar{x},q)$ tale che

$$\sup_{B_{R/2}} u \le c \left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} u^q w\, dx\right)^{1/q} \tag{7}$$

Proposizione 5. Sia $u\ge 0$, $-u\in DG_m(\Omega)$ allora $\forall q>0$, $q < \frac{1}{C_o}$ (vedi dimostrazione) $\exists c > 0$ dipendente da q tale che

$$\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} u^q u dx\right)^{1/q} \le c \inf_{B_{4R}} u \tag{8}$$

Dalla Proposizione 4 e dalla Proposizione 5 segue immediatamente il Teorema 3.

(**) Per la proprietà di duplicazione della misura $w(x)dx$.

Dimostrazione della Proposizione 4. Se $q \geq m$ (la (7) segue dalla (7) del Teorema 3 di [S], che limita il suppu in termini di $w(B(K,R))$ e $\int_{B(K,R)} |u-k|^m wdx$, con $K = 0$, e dalla disuguaglianza di Hölder. Se $0<q<m$ si utilizza la disuguaglianza $ab \leq \varepsilon\, a^{\frac{m}{m-q}} + C(\varepsilon) b^{\frac{m}{q}}$ $a,b \geq 0$ e si applica il Lemma 2.1. di [GG] che limita la crescita di una funzione non negativa che soddisfa una opportuna disuguaglianza.

Per la prova della Proposizione 5 è necessario utilizzare un risultato la cui dimostrazione è contenuta nella dimostrazione del Lemma 4.1. di [S] (vedi anche Lemma 5.1. di [S1]).

"Sia $h>k>k_o$, se $w(B(k_o,R)) \leq \gamma w(B_R)$ con $\gamma \in]0,1[$

allora

$$(h-k)^{\frac{m+1}{2}} (w(B(h,R)))^{\frac{1}{\ell}} \leq c(\gamma) R^{\frac{m+1}{2}} (w(B_R))^{\frac{1-\ell}{2}} \int_{B(K,R)} |\nabla_\lambda u|^m wdx)^{\frac{m+1}{2m}} \cdot \tag{9}$$
$$\cdot\ (w(B(K,R))-w(B(h,R)))^{\frac{m-1}{2m}}$$

con $\ell>1$ costante che appare nel seguente Teorema di immersione:

"Sia $u \in W^1_m(\Omega)$ $\beta > 0$ tale che $w(\{x \in B_R | u(x)=0\}) \geq \beta w(B_R)$; allora $\exists \ell>1$ dipendente da m,w e λ_j tale che

$$(\int_{B_R} |u|^{\ell m} wdx)^{\frac{1}{\ell m}} \leq CR(w(B_R))^{\frac{1-\ell}{\ell m}} (\int_{B_R} |\nabla_\lambda u|^m\, wdx)^{1/m} \text{"}$$

([S1] T.3). .

Proposizione 5.1. Sia $u \geq 0$, $-u \in DGm(\Omega)$, $\tau>0$, $\gamma \in]0,1[$, se $w(\{x \in B_R | u<\tau\}) \leq \gamma w(B_R)$ allora:

$$(10)\quad i)\qquad w(\{x\in B_R | u < \frac{\tau}{2^{\nu+1}}\}) \leq C(\gamma)(\frac{\gamma}{\nu})^{\frac{\ell(m-1)}{2m}} w(B_R)$$

$$(11)\quad i')\qquad \inf_{B_{R/2}} u \geq \lambda(\gamma)\tau$$

$$(12)\quad ii)\qquad \inf_{B_{4R}} u \geq \lambda(\gamma)\tau \quad \text{con} \quad 0<\lambda(\gamma) < 1$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che

$$w(\{x\in B_R/-u>-\tau\}) = w(\{x\in B_R/u < \tau\}) \leq \gamma\, w(B_R)$$

e quindi si può applicare la (9) alla funzione $-u$ per $h>k>-\tau$; scegliendo $h = \frac{-\tau}{2^{s+1}}$, $k = \frac{-\tau}{2^s}$, $s\in N$ e utilizzando le proprietà di duplicazione per la misura $w(x)dx$, si ottiene

$$(w(\{x\in B_R/u < \frac{\tau}{2^{s+1}}\}))^{\frac{2m}{\ell(m-1)}} \leq$$

$$\leq c(\gamma)(w(B_R))^{\frac{2m(1-\ell)+\ell(m+1)}{\ell(m-1)}} (w(B(-\frac{\tau}{2^s},\ell))-w(B(-\frac{\tau}{2^{s+1}},R)).$$

Sommando poi per s da 0 a ν si ottiene

$$\nu(w(\{x\in B_R/u < \frac{\tau}{2^{\nu+1}}\}))^{\frac{2m}{\ell(m-1)}} \leq c(\gamma)(w(B_R))^{\frac{2m(1-\ell)+\ell(m+1)}{\ell(m-1)}} \gamma w(B_R)$$

da cui la (10) (si è sfruttata l'ovvia inclusione

$$\{x \in B_R / u < \frac{\tau}{2^{\nu+1}}\} \subseteq \{x \in B_R / u < \frac{\tau}{2^{s+1}}\})$$

La (11) si prova applicando ancora la (7) di [S] a $-u$ per $K = -\tau$ ottenendo quasi immediatamente

$$(13) \qquad \inf_{B_{R/2}} u \geq \frac{1}{2}\tau$$

purchè $\gamma \in]0,(\frac{1}{2c})^{\frac{m}{\theta}}[$, con C e θ costanti che appaiono nella (7) di [S]

Si fissa ora $\nu \in N$ tale che $\gamma' \equiv c(\gamma)(\frac{\gamma}{\nu})^{\frac{\ell(m-1)}{2m}} \leq (\frac{1}{2c})^{\frac{m}{\theta}}$ con $c(\gamma)$ costante che appare nella (10); allora per la (10) stessa si ha

$w(\{x \in B_R / u < \frac{\tau}{2^{u+1}}\} \leq \gamma' w(B_R)$ e quindi, potendo applicare la (13) si ha:

$$(14) \qquad \inf_{B_{R/2}} u \geq \frac{1}{2}\frac{\tau}{2^{\nu+1}} \equiv \lambda(\gamma)$$

Si noti che $\lambda(\gamma) \in]0,1[$. La dimostrazione della (12) si conclude osservando che per la proprietà di duplicazione della misura $w(x)dx$ esiste $\alpha>$ tale che

$$w(\{x \in B_{8R} / u \geq \tau\}) \geq w(\{x \in B_R / u \geq\} \geq$$

$$\geq (1-\gamma)\, w(B_R) \geq (1-\gamma)(\frac{1}{8})^{\alpha} w(B_{8R})$$

il che equivale a $w(\{x \in B_{8R} / u<\tau\}) \leq \gamma''\, w(B_{8R})$ e per la (14) si ha la (12).

<u>Dimostrazione della Proposizione 5.</u> Se $u = 0$ la (8) è ovvia. Sia u non identicamente nulla; allora $\exists t > 0$ tale che

$$E = \{x \in B_R / u(x) \geq \lambda^{i-1} t\} \equiv A_t^{i-1}.$$

ha $w(E) > 0 \ \forall i \in N$. ($\lambda = \lambda(\gamma)$ è la costante che appare nella (12)). Applichiamo il Lemma 3 all'insieme E. Sia $\delta \in]0,1[$ fissato (supponiamo $C\delta<1$ con C costante che appare nel Lemma 3), esistono allora $z \in B_R, \rho>0$ tali che $w(E \cap B(z,\rho)) \geq$ $\geq \delta w(B(z,\rho))$, allora $B(z,4\rho) \cap B_R$ è uno degli insieme che definiscono E_δ nel Lemma 3; dalla (12), poichè ne segue $w(\{x \in B(z,\rho)/u<\lambda^{i-1}t\}) \leq (1-\delta) w(B(z,\rho))$, segue $u(x) \geq \lambda^i t \ \forall x \in B(z,4\rho)$ e quindi, poichè E_δ è l'unione di tutti tali insiemi $(B(z,4\rho))$ intersecati con B_R, allora su E_δ è $u \geq \lambda^i t$ e quindi si hanno due possibilità:

i) $$w(\{x \in B_R / u \geq \lambda^i t\}) \geq u(E_\delta) = w(B_R)$$

oppure

ii) $$w(\{x \in B_R / u \geq \lambda^i t\}) \geq w(E_\delta) \geq \frac{1}{C\delta} w(E) = \frac{1}{C\delta} w(\{x \in B_R / u \geq \lambda^{i-1} t\}).$$

In ogni caso si conclude: se $w(A_t^\circ) \geq C^{s-1}\delta^s w(B_R)$ si ha:

$$w(A_t^{s-1}) \geq \frac{1}{C\delta} w(A_t^{s-2}) \geq \dots \geq \frac{1}{(C\delta)^{s-1}} w(A_t^o) \geq \delta w(B_R)$$

da cui

$$w(\{x \in B_R / u < \lambda^{s-1} t\}) \leq (1-\delta) w(B_R)$$

allora per la (12)

$$\inf_{B_{4R}} u \geq \lambda^s t$$

Perchè sia $w(A_t^o) \geq C^{s-1}\delta^s w(B_R)$ basta scegliere

$$s \geq \log(c\,\frac{w(A_t^o)}{w(B_R)})/\ \log\,(C\delta) \text{ e allora}$$

$$\inf_{B_{4R}} u \geq C_1 t (\frac{w(A_t^o)}{w(B_R)})^{C_o}$$

da cui
$$\frac{w(A_t^o)}{w(B_R)} \leq C_1^{-1}\, t^{-\frac{1}{c_o}} (\inf_{B_{4R}} u)^{\frac{1}{c_o}}$$

Ora poichè

$$\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^q w dx = \frac{1}{w(B_R)} (q \int_\xi^{+\infty} t^{q-1} w(A_t^o) dt + q \int_0^\xi t^{q-1} w(A_t^o) dt)$$

ponendo $\xi = \inf_{B_{4R}} u$ e $q < \frac{1}{c_o}$ si ha

$$\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^q w dx = \frac{q}{w(B_R)} \int_\xi^{+\infty} t^{q-1}\, w(A_t^o)\, dt + \xi^q \leq$$

$$\leq qC_1^{-1} \int_\xi^{+\infty} t^{q-1-1/c_o} (\inf_{B_{4R}} u)^{1/C_o} dt + (\inf_{B_{4R}} u)^q = \frac{qC_1^{-1}}{\frac{1}{C_o} - q} (\inf_{B_{4R}} u)^q + (\inf_{B_{4R}} u)^q$$

da cui

$$(\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} u^q a dx)^{\frac{1}{q}} \leq C \inf_{B_{4R}} u$$

<u>NOTA</u> – Il risultato precedente vale anche per i quasi-minimi ([G],[GG2], [BT]):

"$u\in W'_u(\Omega)$ è un quasi-minimo per il funzionale **F**, con costante Q se, per ogni $\phi\in W'_m(\Omega)$, $\mathrm{supp}\phi\subset\Omega$, è

$$\mathbf{F}(u,\mathrm{supp}\phi)\leq Q\mathbf{F}(u+\phi,\mathrm{supp}\phi)".$$

BIBLIOGRAFIA

[BT] E. Di BENEDETTO, N.S. TRUDINGER, "Harnack inequalities for quasi-minima of variational integrals", Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 1, n. 4, 1984.

[C] A.P. CALDERON, "Inequalities for the maximal function relative to a metric", Studia Math. 57, 1976.

[CW] RONALD L. COIFMAN, G. WEISS, "Analyse Harmonique Non-commutative sur certain Spaces Homogenes",Springer-Verlag-Berlin-Lecture Notes in Mathematics, 242.

[DG] E. De GIORGI, "Sulla differenziabilitã e l'analiticitã delle estremali degli integrali multipli regolari", Mem. Accad. Sci. Torino cl. Fis. Mat. Nat. (3), 3, 1957.

[FL1] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, "Une metrique associeẽ a une classe d'operateurs elliptiques degeneres", Proceedings of the meeting "Linear Partial and Pseudo-Differential Operators", Torino 1982, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino.

[FL2] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, "Holder regularity Theorem for a class of linear non uniformly elliptic operators with measurable coefficients"; Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, Vol. X, n. 4 1983.

[FL3] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, "An embedding theorem for Sobolev Spaces related to non smoth vector fields and Harnack inequality" Comm. in Partial Differential Equations, Vol. 9 (13), 1984.

[FS] B. FRANCHI, R. SERAPIONI, "Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach", Prepint 1986.

[G] M. GIAQUINTA, "An introduction to the regularity for non-linear elliptic systems", Mathematik Department eth Zurich und Forschungsinstitut fur Mathematik eth Zurich, 1983/84.

[GG1] M. GIAQUINTA, E. GIUSTI, "On the regularity of the minima of variational integrals", Acta Math. 148, 1982.

[GG2] M. GIAQUINTA, E. GIUSTI, "Quasi-minima" Ann. Ist. Henri Poincaré, Vol. 1, n. 2, 1984.

[KS] N.V. KRYLOV, M.V. Safanov, "Certain Properties of solutions of parabolic equations with measurable coefficients", Izvestia Akad. Nauk. SSSR. t. 40, 1980, English transl. Math. USSR, Izv. t. 16, 1981.

[M] G. MODICA, "Quasi minimi di alcuni funzionali degeneri", Ann. Mat. Pura Appl. 142, 1985.

[NSW] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER, "Balls and metrics defined by vector fields I:basic properties", Acta Math. 1955, 1955.

[S] V. SCORNAZZANI, "Sulla regolarità Hölderiana dei minimi di certi funzionali", Sem. di Anal. Mat. Dip. Univ. BO, 1986/87.

[S1] V. SCORNAZZANI, "On Hölder Theorem and Harnack inequality for the minimizers of some new functionals", in via di pubblicazione.